第 2 节 函数的单调性与奇偶性（★★☆）

强化训练

类型Ⅰ：单调性、奇偶性判断与求参

1．（2020·新课标Ⅱ卷·★）设函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$，则 $f(x)$（　　）

（A）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　（B）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

（C）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　（D）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

答案：A

解析：先看奇偶性，可用奇函数的和差结论判断，因为 $y=x^3$ 和 $y=\dfrac{1}{x^3}$ 都是奇函数，所以 $f(x)$ 为奇函数，

再判断单调性，可拆分成 $y=x^3$ 和 $y=-\dfrac{1}{x^3}$ 两部分来看，

由幂函数的性质，$y=x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，$y=x^{-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，所以 $y=-x^{-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

而 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}=x^3+(-x^{-3})$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，故选 A.

2．（2023·新高考Ⅰ卷·★★）设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

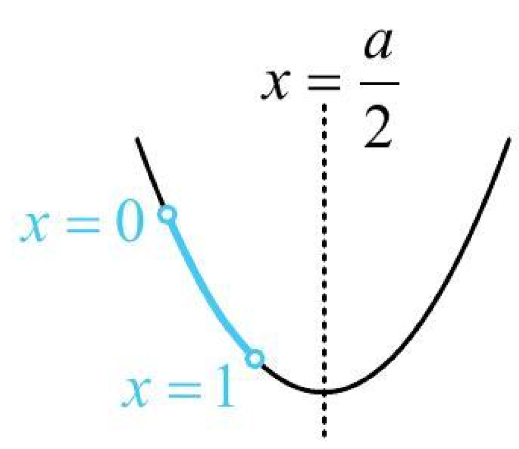
（A）$(-\infty,-2]$　　（B）$[-2,0)$　　（C）$(0,2]$　　（D）$[2,+\infty)$

答案：D

解析：函数 $y=f(x)$ 由 $y=2^u$ 和 $u=x(x-a)$ 复合而成，可由同增异减准则分析单调性，

因为 $y=2^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以要使 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在 $(0,1)$ 上↘，只需 $u=x(x-a)$ 在 $(0,1)$ 上↘，

二次函数 $u=x(x-a)=x^2-ax$ 的对称轴为 $x=\dfrac{a}{2}$，如图，由图可知应有 $\dfrac{a}{2}\ge 1$，解得：$a\ge 2$.



3．（2023·韶关模拟·★★）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x^2+(a-1)x+a+1$，则 $f(-3)=$_____.

答案：-3

解析：给出的奇函数在 $x=0$ 处有定义，可先用 $f(0)=0$ 求出 a，由题意，$f(0)=a+1=0$，所以 $a=-1$，从而当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，故 $f(-3)=-f(3)=-(3^2-2\times 3)=-3$.

4．（2022·河南模拟·★★）若函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+a}-x)$ 为奇函数，则 $a=$（　　）

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）1　　（D）2

答案：C

解法 1：此处不确定 0 是否在定义域内，由 $f(0)=0$ 求 a 不严谨，可用奇函数的定义处理，

由题意，$f(-x)+f(x)=\ln(\sqrt{x^2+a}+x)+\ln(\sqrt{x^2+a}-x)=\ln[(\sqrt{x^2+a}+x)(\sqrt{x^2+a}-x)]=\ln a=0$，所以 $a=1$.

解法 2：在内容提要第 5 点中，我们归纳了 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}\pm x)$ 为奇函数，与 $f(x)$ 对比即得 $a=1$.

5. （2023 • 全国乙卷 • ★★）已知 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，则 $a=$（　　）

（A）-2　　（B）-1　　（C）1　　（D）2

答案：D

解法 1：要求 a，可结合偶函数的性质取特值建立方程，

由 $f(x)$ 为偶函数得 $f(-1)=f(1)$，故 $\dfrac{-e^{-1}}{e^{-a}-1}=\dfrac{e}{e^a-1}$ ①，

又 $\dfrac{-e^{-1}}{e^{-a}-1}=\dfrac{e^{-1}}{1-e^{-a}}=\dfrac{e^{a-1}}{e^a-1}$，代入①得 $\dfrac{e^{a-1}}{e^a-1}=\dfrac{e}{e^a-1}$，

所以 $e^{a-1}=e$，从而 $a-1=1$，故 $a=2$，

经检验，满足 $f(x)$ 为偶函数.

解法 2：也可直接用偶函数的定义来分析，因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，

从而 $\dfrac{-xe^{-x}}{e^{-ax}-1}=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}$，故 $\dfrac{-e^{-x}}{e^{-ax}-1}=\dfrac{e^x}{e^{ax}-1}$，所以 $\dfrac{-e^{-x}\cdot e^{ax}}{1-e^{ax}}=\dfrac{e^x}{e^{ax}-1}$，从而 $\dfrac{e^{ax-x}}{e^{ax}-1}=\dfrac{e^x}{e^{ax}-1}$，故 $e^{ax-x}=e^x$，

所以 $ax-x=x$，故 $(a-2)x=0$，此式要对定义域内任意的 x 都成立，只能 $a-2=0$，所以 $a=2$.

类型 II：奇函数+常数结论的应用

6. （★★）设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$g(x)=f(x)-1$，$g(1)=-2$，则 $g(-1)=$______.

答案：0

解析：因为 $f(x)$ 为奇函数且 $g(x)=f(x)-1$，所以 $g(-x)+g(x)=f(-x)-1+f(x)-1=-2$，

故 $g(-1)+g(1)=-2$，又 $g(1)=-2$，所以 $g(-1)=-2-g(1)=0$.

7. （2022 • 乐山模拟 • ★★）设 $f(x)=|x|\sin x+1$，若 $f(a)=2$，则 $f(-a)=$______.

答案：0

解析：设 $g(x)=|x|\sin x$，则 $g(x)$ 为奇函数，且 $f(x)=g(x)+1$，

所以 $f(a)+f(-a)=g(a)+1+g(-a)+1=2$，又 $f(a)=2$，所以 $f(-a)=2-f(a)=0$.

8. （★★★）若函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$______.

答案：2

解析：$f(x)$ 的最值不好求，所以将 $f(x)$ 拆项，利用对称特性解题，

由题意，$f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}=\dfrac{x^2+2x+1+\sin x}{x^2+1}=1+\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$，其中 $y=\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$ 为奇函数，

所以 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=M+m=2$（理由见内容提要 11）.

类型III：函数值不等式的解法

9．（2017·新课标Ⅰ卷·★★）奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\le f(x-2)\le 1$ 的 x 的取值范围是（　　）

（A）$[-2,2]$　　（B）$[-1,1]$　　（C）$[0,4]$　　（D）$[1,3]$

答案：D

解析：为了利用单调性解不等式，先把原不等式中的 -1 和 1 也化成 $f(x)$ 的某个函数值，

因为 $f(x)$ 为奇函数且 $f(1)=-1$，所以 $f(-1)=-f(1)=1$，从而 $-1\le f(x-2)\le 1$ 即为 $f(1)\le f(x-2)\le f(-1)$，结合 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘可得 $-1\le x-2\le 1$，故 $1\le x\le 3$.

10．（2022·湖北五校联考·★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\le 0\\x^2+2,x>0\end{cases}$，若 $f(|x|)>f(x^2-2)$，则实数 x 的取值范围为_____.

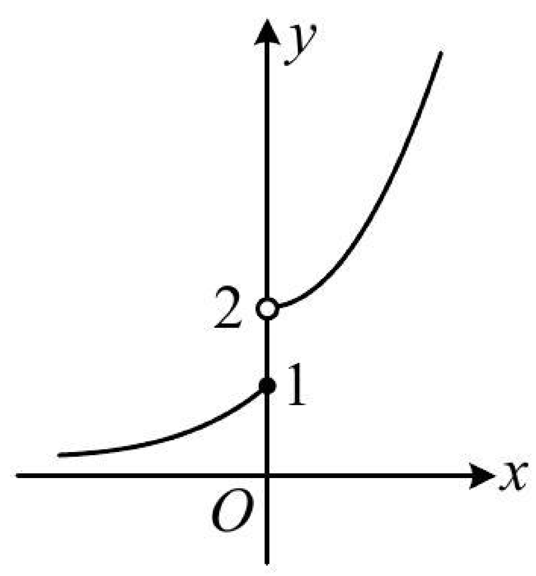
答案：$(-2,2)$

解析：看到函数值不等式 $f(|x|)>f(x^2-2)$，首先考虑判断单调性，此处为分段函数，可作图看单调性，

由题意，$f(x)$ 的大致图象如图所示，由图可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

所以 $f(|x|)>f(x^2-2)\Leftrightarrow|x|>x^2-2$，将 x^2 看成 $|x|^2$，移项可分解因式，

故 $(|x|+1)(|x|-2)<0$，因为 $|x|+1>0$，所以 $|x|<2$，解得：$-2<x<2$.



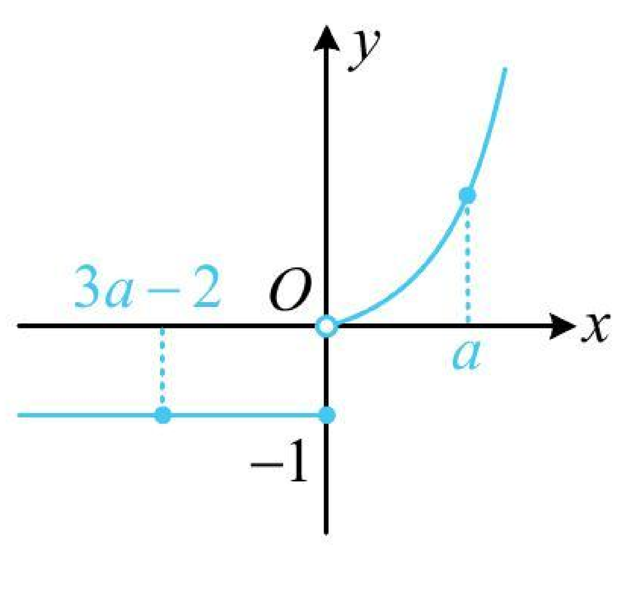
11．（2022·漳州模拟·★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1,x>0\\-1,x\le 0\end{cases}$，若 $f(3a-2)<f(a)$，则 a 的取值范围为_____.

答案：$(0,1)$

解析：若代入解析式解 $f(3a-2)<f(a)$，则需讨论的情况较多，所以画图结合单调性分析，

函数 $f(x)$ 的大致图象如图，由图可知要使 $f(3a-2)<f(a)$，

只需 a 在 $(0,+\infty)$ 这一段，且 $3a-2$ 在 a 左侧，所以 $\begin{cases}a>0\\3a-2<a\end{cases}$，解得：$0<a<1$.



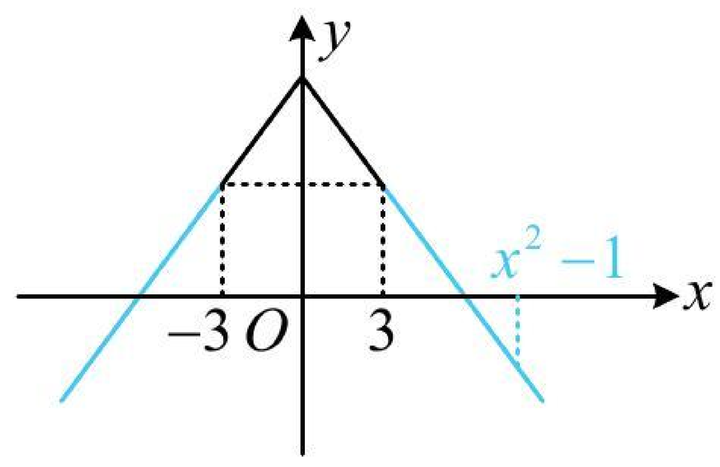
12．（★★）已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，则满足 $f(x^2-1)<f(3)$ 的 x 的取值范围是_____.

答案： $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

解析： 偶函数给了 y 轴一侧的单调性，可画出草图，用图象来分析 $f(x^2-1)<f(3)$，

由题意，函数 $f(x)$ 的草图如图，可以看到，图象上离 y 轴越远的点，对应的函数值越小，

所以 $f(x^2-1)<f(3)\Leftrightarrow|x^2-1|>3$，解得：$x<-2$ 或 $x>2$.



13．（★★★）设 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$，则使 $f(x^2-x)>f(2x-2)$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　（B）$(-\infty,-2)\cup(0,2)$　　（C）$(-2,2)$　　（D）$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

答案： A

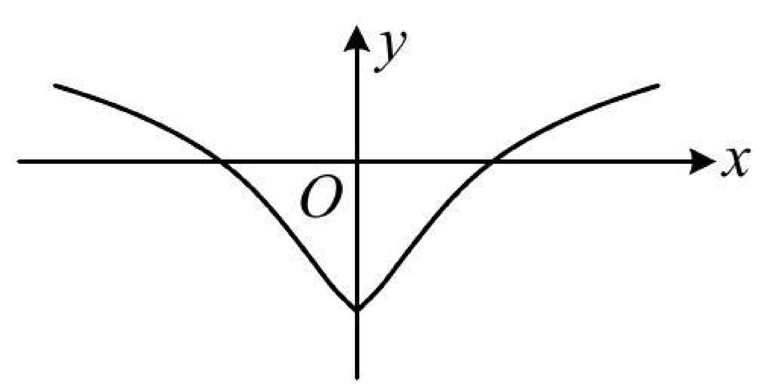
解析： $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$ 是定义在 **R** 上的偶函数，

虽给了解析式，但将 $f(x^2-x)>f(2x-2)$ 代入解析式求解较麻烦，故考虑先判断 y 轴一侧的单调性，再画草图来看，此处要求导吗？其实不用，拆分分析即可，

当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{1}{1+x^2}$，而 $y=\ln(1+x)$ 和 $y=-\dfrac{1}{1+x^2}$ 都↗，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↗，

故 $f(x)$ 的草图如图，可以看到，图象上离 y 轴越远的点，对应的函数值越大，

所以 $f(x^2-x)>f(2x-2)\Leftrightarrow|x^2-x|>|2x-2|\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 1\\|x|>2\end{cases}$，故 $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.



14．（★★★）定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(x-2)$ 是偶函数，则 $f(x+2)>f(x)$ 的解集是_____.

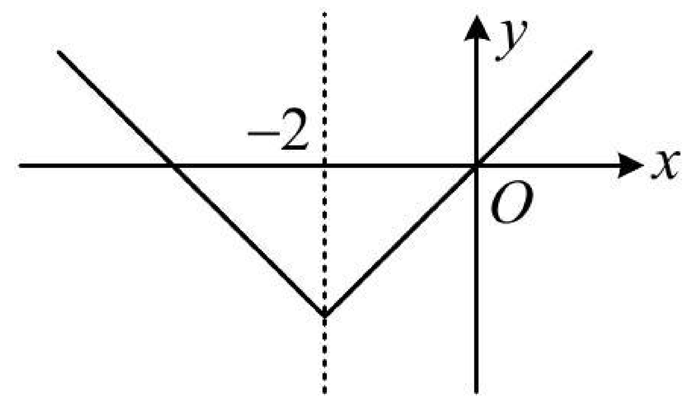
答案： $(-3,+\infty)$

解析： $f(x-2)$ 是偶函数 $\Rightarrow f(x-2)$ 的图象关于 y 轴对称，

而 $f(x-2)$ 的图象可由 $f(x)$ 的图象向右平移 2 个单位得到，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，

因为 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上↗，所以 $f(x)$ 的草图如图所示，

由图可知 $f(x)$ 的图象上离对称轴 $x=-2$ 越远的点，其函数值越大，可将 $f(x+2)$ 和 $f(x)$ 的大小关系翻译成自变量 $x+2$ 和 x 离 -2 的远近，从而 $f(x+2)>f(x)\Leftrightarrow|x+2-(-2)|>|x-(-2)|$，两端平方可解得：$x>-3$.



15．（2022・广东模拟・★★★）若定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\ge 0$ 的 x 的取值范围为（　　）

（A）$[-1,1]\cup[3,+\infty)$　（B）$[-3,-1]\cup[0,1]$　（C）$[-1,0]\cup[1,+\infty)$　（D）$[-1,0]\cup[1,3]$

答案：D

解析：不等式 $xf(x-1)\ge 0$ 左侧是两项之积，可讨论 x 的正负，并将其约掉，化简后再解，

由题意，函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图所示，显然 $x=0$ 是不等式 $xf(x-1)\ge 0$ 的解；

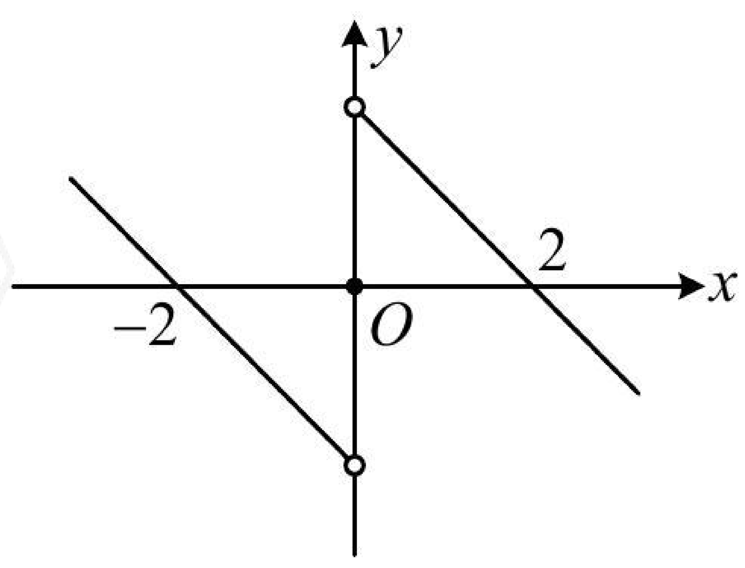
当 $x>0$ 时，$xf(x-1)\ge 0\Leftrightarrow f(x-1)\ge 0$，由图可知应有 $x-1\le -2$ 或 $0\le x-1\le 2$，

解得：$x\le -1$ 或 $1\le x\le 3$，结合 $x>0$ 可得 $1\le x\le 3$；

当 $x<0$ 时，$xf(x-1)\ge 0\Leftrightarrow f(x-1)\le 0$，由图可知应有 $-2\le x-1\le 0$ 或 $x-1\ge 2$，

解得：$-1\le x\le 1$ 或 $x\ge 3$，结合 $x<0$ 可得 $-1\le x<0$；

综上所述，所求 x 的取值范围为 $[-1,0]\cup[1,3]$.



16．（2022・盐城模拟・★★★）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，则不等式 $f(x)+f(2x-1)>0$ 的解集是（　　）

（A）$(1,+\infty)$　（B）$(\frac{1}{3},+\infty)$　（C）$(-\infty,\frac{1}{3})$　（D）$(-\infty,1)$

答案：B

解析：看到 $f(x)+f(2x-1)>0$ 这种结构，猜想 $f(x)$ 为奇函数，移项后才能将负号拿到括号里面，利用单调性求解，所给函数解析式较复杂，可拆成 $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$ 和 $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 分别研究奇偶性和单调性，

设 $g(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}(x\in\mathbf{R})$，$h(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)(x\in\mathbf{R})$，则 $f(x)=g(x)+h(x)$，

因为 $g(-x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数，$g'(x)=\mathrm{e}^x-(-\mathrm{e}^{-x})=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}>0\Rightarrow g(x)$ 在 **R** 上↗，

又 $h(-x)+h(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln[(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)]=\ln 1=0$，所以 $h(x)$ 为奇函数，

在 $[0,+\infty)$ 上，$h(x)$ 随着 x 的增大而增大，所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↗，

结合奇函数图象的对称性知 $h(x)$ 在 **R** 上↗，从而 $f(x)$ 是奇函数且在 **R** 上↗，

故 $f(x)+f(2x-1)>0\Leftrightarrow f(x)>-f(2x-1)\Leftrightarrow f(x)>f(1-2x)\Leftrightarrow x>1-2x$，解得：$x>\frac{1}{3}$.

【反思】①函数 $y=\log_a(\sqrt{1+m^2x^2}\pm mx)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，熟悉这一结论对解题有帮助；②奇函数若在 $[0,+\infty)$ 上↗，则它必定在 **R** 上↗.

17．（★★★）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$，若 $f(\log_3 x)-f(\log_3\frac{1}{x})\le 2f(1)$，则 x 的取值范围为（　　）

（A）$[\frac{1}{3},1]$　　（B）$[\frac{1}{3},3]$　　（C）$[\frac{1}{3},+\infty)$　　（D）$(0,3]$

答案：D

解析：注意到 $\log_3\frac{1}{x}=\log_3 x^{-1}=-\log_3 x$，所以先分析 $f(x)$ 是否为奇函数，若是，则负号可以拿出去，

由题意，$f(-x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x=-f(x)\Rightarrow f(x)$ 为奇函数，所以 $f(\log_3\frac{1}{x})=f(-\log_3 x)=-f(\log_3 x)$，

代入题干不等式化简得：$f(\log_3 x)\le f(1)$，于是又想到分析 $f(x)$ 的单调性，用单调性来解此不等式，

因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}>0$，所以 $f(x)$ 在 **R** 上↗，从而 $f(\log_3 x)\le f(1)\Leftrightarrow\log_3 x\le 1$，故 $0<x\le 3$.

18．（★★★）（多选）已知函数 $f(x)=x^3+x-\sin x$，实数 m，n 满足不等式 $f(2m-3n)+f(n-2)>0$，则（　　）

（A）$\mathrm{e}^m>\mathrm{e}^n$　　（B）$\frac{n}{m}>\frac{n+1}{m+1}$　　（C）$\ln(m-n)>0$　　（D）$m^3<n^3$

答案：AC

解析：要判断选项，得先把 $f(2m-3n)+f(n-2)>0$ 这个条件翻译出来，看到 $f(a)+f(b)>0$ 这种结构，想到利用奇函数转化为 $f(a)>f(-b)$，再结合单调性去掉 f，下面先判断奇偶性和单调性，

由题意，$f(-x)=(-x)^3-x-\sin(-x)=-x^3-x+\sin x=-f(x)\Rightarrow f(x)$ 为奇函数，

$f'(x)=3x^2+1-\cos x\ge 0\Rightarrow f(x)$ 是 **R** 上的增函数，

所以 $f(2m-3n)+f(n-2)>0\Leftrightarrow f(2m-3n)>-f(n-2)\Leftrightarrow f(2m-3n)>f(2-n)$，

又 $f(x)$ 是增函数，所以 $f(2m-3n)>f(2-n)$ 等价于 $2m-3n>2-n$，故 $m-n>1$，

A 项，由 $m-n>1$ 知 $m>n+1>n$，所以 $\mathrm{e}^m>\mathrm{e}^n$，故 A 项正确；

B 项，$\frac{n}{m}>\frac{n+1}{m+1}\Leftrightarrow\frac{n}{m}-\frac{n+1}{m+1}>0\Leftrightarrow\frac{n(m+1)-m(n+1)}{m(m+1)}>0\Leftrightarrow\frac{n-m}{m(m+1)}>0$，由本题的条件可判断出 $n-m<0$，

但 m 和 $m+1$ 的符号无法判断，所以 $\frac{n}{m}>\frac{n+1}{m+1}$ 不一定成立，故 B 项错误；

C 项，$m-n>1\Rightarrow\ln(m-n)>0$，故 C 项正确；

D 项，因为函数 $y=x^3$ 在 **R** 上↗，且 $m>n$，所以 $m^3>n^3$，故 D 项错误.